Marco Bramanti
Fulvia Confortola
Sandro Salsa

Matematica per le scienze

Con fondamenti di probabilità e statistica

MATEMATICA ZANICHELLI

Marco Bramanti
Fulvia Confortola
Sandro Salsa

Matematica per le scienze

Con fondamenti di probabilità e statistica

Se vuoi accedere alle risorse online riservate

1. Vai su **my.zanichelli.it**
2. Clicca su *Registrati*.
3. Scegli *Studente*.
4. Segui i passaggi richiesti per la registrazione.
5. Riceverai un'email: clicca sul link per completare la registrazione.
6. Cerca il tuo codice di attivazione stampato in verticale sul bollino argentato in questa pagina.
7. Inseriscilo nella tua area personale su **my.zanichelli.it**

Se hai già effettuato la registrazione, per accedere ai contenuti riservati ti serve solo il codice di attivazione.

MATEMATICA ZANICHELLI

Per i Capitoli 1-7 gli autori hanno rielaborato testi e figure tratti da:
Marco Bramanti, Carlo Domenico Pagani, Sandro Salsa, *Analisi matematica 1 con elementi di geometria e algebra lineare*, Zanichelli 2014;
Marco Bramanti, Carlo Domenico Pagani, Sandro Salsa, *Analisi matematica 2*, Zanichelli 2009.

Realizzazione editoriale:
– *Coordinamento editoriale*: Isabella Nenci
– *Redazione*: Marzia Rivi
– *Impaginazione e disegni*: CompoMat, Configni (RI)

Copertina:
– *Progetto grafico*: Falcinelli & Co., Roma
– *Immagine di copertina*: © Tiago Alexandre Lopes su Unsplash

Prima edizione: maggio 2024

Ristampa: **prima tiratura**

5 4 3 2 1 2024 2025 2026 2027 2028

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli:
sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra essi.
L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro
privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.
Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro scrivere al seguente indirizzo:

Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34
40126 Bologna
fax 051293322
e-mail: **linea_universitaria@zanichelli.it**
sito web: **www.zanichelli.it**

Prima di effettuare una segnalazione è possibile verificare se questa sia già stata inviata in precedenza,
identificando il libro interessato all'interno del nostro catalogo online per l'Università.

Per comunicazioni di tipo commerciale: **universita@zanichelli.it**

Stampa:

Indice generale

 © 978-88-08-32070-4

Inquadra il QR code per consultare l'Indice analitico interattivo

Prefazione

Questo nuovo testo universitario di Matematica è stato pensato per quei corsi di studio di discipline scientifiche nei quali alla formazione matematica di base è dedicato un numero di crediti limitato, e in cui tuttavia si dovrebbero toccare, pur senza andare troppo in profondità, numerosi argomenti di discipline diverse: i primi elementi di *calcolo differenziale* e *integrale* per funzioni di una variabile, elementi di *algebra lineare* e *geometria*, talvolta elementi di *statistica* e *calcolo di probabilità*, talvolta anche argomenti di analisi matematica che vanno oltre quelli contenuti in un classico primo corso, come le *equazioni differenziali ordinarie* o l'*ottimizzazione per funzioni di più variabili*. Probabilmente in nessun programma di studi trovano posto simultaneamente tutti gli argomenti che abbiamo citato, ma esistono molte varianti diverse di programmi per questi corsi, in cui sono trattati ora alcuni ora altri di questi argomenti. Abbiamo cercato di scrivere un libro che potesse coprire tutti questi contenuti, in modo da risultare utilizzabile in contesti anche piuttosto diversi. Un testo dunque ricco ma flessibile, costruito e pensato per poter essere utilizzato in modo modulare, adattandolo a esigenze e percorsi dai contenuti differenti.

Nel far questo abbiamo attinto molto liberamente al materiale che due di noi hanno sviluppato, insieme a C. D. Pagani, nei precedenti testi di analisi matematica, algebra lineare e geometria per questa casa editrice[a], mentre la parte di calcolo delle probabilità e statistica è stata scritta completamente ex novo da Fulvia Confortola. Ma tutto il materiale è stato ridisegnato e rimodulato in vista delle peculiari esigenze didattiche dei corsi a cui è rivolto.

Presentare uno spettro ampio di argomenti matematici, pensando che dovranno essere insegnati e appresi in tempi limitati, da parte di studenti per i quali la matematica non è l'interesse principale, pone evidentemente delle sfide didattiche a cui non è facile rispondere in modo efficace. Riteniamo utile esplicitare i criteri generali che ci hanno guidato e che ispirano questo testo.

Essenzialità. Ci siamo concentrati su una presentazione dei contenuti essenziali, con una sottolineatura dei concetti importanti e del loro ruolo nella modellizzazione matematica e nell'impianto complessivo del percorso, senza insistere sulla preparazione ad affrontare esercizi tecnicamente impegnativi. Per esempio, alcuni elementi di calcolo differenziale e integrale per funzioni di due (o più) variabili sono stati introdotti (cap. 7) principalmente per supportare la presentazione di certi concetti di probabilità e di statistica (es. integrali doppi e leggi di variabili aleatorie doppie), senza la pretesa di darne delle trattazioni complete.

Per gli stessi motivi di essenzialità abbiamo rinunciato a introdurre certi concetti astratti quando questo non ci sembrava strettamente funzionale al percorso seguito. Per esempio, nel capitolo 5 gli argomenti basilari di algebra lineare sono sviluppati senza introdurre la nozione generale di spazio vettoriale.

Attenzione ai prerequisiti e alla gradualità. Pensando di rivolgerci a studenti nel cui corso di studi la matematica non gioca un ruolo dominante, abbiamo cercato di venire incontro a eventuali debolezze e lacune nella preparazione scolastica, non lesinando richiami anche su argomenti molto elementari (per esempio: metodi elementari di *risoluzione di equazioni e sistemi*, *equazioni logaritmiche*, *disequazioni esponenziali* e *logaritmiche*, *proporzioni* e *percentuali*, richiami di *geometria analitica nel piano*, richiami di *trigonometria*, primi concetti sui *vettori nel piano*). Questo è stato fatto anche a costo di introdurre nel libro qualche ripetizione, nei casi in cui un certo argomento venga affrontato in modo approfondito a un certo punto del percorso, ma fin da subito occorra possederne almeno qualche elemento.

Equilibrio tra sinteticità e chiarezza. L'eccessiva brevità oscura le idee. La giustificazione del risultato, la dimostrazione, quando non richieda un apparato formale troppo pesante, e quindi non sia incompatibile con la sinteticità, rende più consapevoli dei nessi e perciò aiuta a comprendere.

[a] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica 1 con elementi di geometria e algebra lineare*, Zanichelli, 2014, e M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica 2*, Zanichelli, 2009.

La ricerca dell'essenzialità non può trasformare un testo di matematica in un ricettario. Perciò non abbiamo rinunciato all'apparato dimostrativo proprio del metodo matematico, pur snellendolo rispetto ai testi pensati per percorsi più ampi. Alcune dimostrazioni particolarmente impegnative sono state omesse; a volte abbiamo raggruppato le dimostrazioni dei risultati su un certo argomento in paragrafi a sé (per esempio, nel capitolo 2 un paragrafo raccoglie le dimostrazioni su limiti e continuità).

Motivazioni ed esempi. In uno studio impegnativo come quello della matematica, la motivazione gioca un ruolo fondamentale. Si è cercato di presentare ogni nuovo concetto attraverso esempi tratti dalle applicazioni più comuni, evidenziando ove possibile il ruolo dello strumento matematico nella modellizzazione scientifica. I significati geometrici e fisici dei vari concetti introdotti sono stati sistematicamente evidenziati. La teoria è stata sviluppata accompagnandola costantemente con riferimenti a problemi tratti dalle diverse scienze, privilegiando le scienze naturali, la biologia, la fisiologia, la fisica e in minor misura l'ingegneria. Il calcolo differenziale (cap. 3) e integrale (cap. 4) è accompagnato da abbondanti esempi di questi tipi. Nel capitolo 5 (algebra lineare), lo studio di autovalori, autovettori e diagonalizzazione di una matrice è presentato con una motivazione dei modelli dinamici discreti, tipicamente orientati alla dinamica delle popolazioni. Nel capitolo 6 (equazioni differenziali) sono discussi molti esempi di modelli differenziali di significato reale. Nei capitoli 8 (probabilità) e 9 (statistica) molti esempi sono tratti dalla genetica, biologia o fisiologia, oltre che da situazioni della vita comune.
Certi modelli matematici significativi (come la crescita logistica, certi esempi su genetica e ereditarietà, certi modelli dalla fisiologia) sono stati ripresi in più capitoli o paragrafi da punti di vista diversi. In questi casi caso abbiamo fornito i rimandi opportuni, in modo che il significato degli esempi non si perda in caso di utilizzo parziale del testo.

Modularità. Come già accennato, e come dovrebbe risultare evidente al docente che legga il sommario e sfogli il libro con attenzione, questo testo si presta a un uso modulare.
I primi 4 capitoli presentano, dopo una prima alfabetizzazione al linguaggio matematico di base (a eccezione dei numeri complessi, rimandati al capitolo 5, in cui saranno introdotti e utilizzati per l'algebra lineare), il nocciolo del calcolo differenziale e integrale per le funzioni reali di variabile reale, che costituisce il cuore della maggior parte dei corsi di matematica generale, e sono fondamentali per quasi tutto il seguito del libro.
I successivi capitoli proseguono il discorso in direzioni diverse: l'algebra lineare e la geometria analitica (cap. 5), le equazioni differenziali ordinarie (cap. 6), i rudimenti di calcolo infinitesimale in più variabili (cap. 7), il calcolo delle probabilità (cap. 8) e la statistica (descrittiva e inferenziale, cap. 9).

Anche se l'ordine dei capitoli segue una logica ben precisa, i capitoli 5-9 possiedono anche una discreta indipendenza. Il cap. 6 sulle equazioni differenziali ordinarie dipende ovviamente dai capitoli 1-4 ma non necessariamente dal capitolo 5, se non per l'uso dei numeri complessi: le idee sulle equazioni differenziali *lineari* sono presentate in modo sostanzialmente autocontenuto, senza basarsi pesantemente sul linguaggio della linearità che pure è stato sviluppato nel capitolo 5. A sua volta, il capitolo 6 non è necessario alla comprensione dei capitoli che seguono. Alcuni argomenti del capitolo 7, come le curve o l'ottimizzazione, sono presentati per il loro intrinseco interesse nelle scienze applicate; altri, come gli integrali doppi e un certo linguaggio delle funzioni di più variabili, sono soprattutto funzionali alla probabilità (cap. 8).
Il capitolo 8 nella sua parte iniziale sulla probabilità di eventi utilizza solo matematica di base; proseguendo con lo studio delle variabili aleatorie utilizza in effetti concetti contenuti in buona parte dei capitoli precedenti.
Il capitolo 9 contiene una prima parte di statistica descrittiva che è sostanzialmente autocontenuta (dipende solo dalla matematica di base dei capitoli 1 e 2) e una parte di statistica inferenziale che invece dipende anche dal capitolo 8. La ricerca della modularità non deve temere qualche ripetizione: per esempio, si parla di retta di regressione nel capitolo 7 nel contesto del calcolo differenziale in più variabili, e poi più ampiamente nel capitolo 9 di statistica (ma anche in un corso in cui non si tratti la statistica, può essere il caso di accennare a questo argomento).

Ci auguriamo che questo testo possa risultare utile a chi studia e a chi insegna in corsi di studi scientifici, con l'invito a farci avere suggerimenti, osservazioni e critiche, così da continuare a stimolarci nel migliorare i nostri testi.

Marzo 2024

Gli Autori

marco.bramanti@polimi.it
fulvia.confortola@polimi.it
sandro.salsa@polimi.it

3 Calcolo differenziale

1 INTRODUZIONE AL CALCOLO DIFFERENZIALE

In questa introduzione presentiamo alcuni *problemi* da cui il calcolo differenziale è nato e che costituiscono alcune delle motivazioni per studiarlo. Porremo questi problemi sotto forma di domande, a cui non risponderemo subito, ma nel seguito del capitolo. Come si vedrà, la risposta coinvolge la nozione di *limite*, discussa nel capitolo 2. Anzi, si può dire che storicamente la nozione di limite sia stata introdotta principalmente per sviluppare le idee del calcolo differenziale, che introdurremo in questo capitolo, e del calcolo integrale, di cui ci occuperemo nel capitolo 4.

Che cos'è la retta tangente in un punto a una curva?

Anche se geometricamente il concetto sembra intuitivo, non è così ovvio quale possa essere una definizione corretta. Consideriamo la più semplice figura curvilinea, ossia la circonferenza. Che cos'è la tangente a una circonferenza in un suo punto P? In base alla geometria elementare possiamo rispondere:

1. È la retta passante per P e perpendicolare al raggio passante per P;

oppure:

2. È l'unica retta passante per P che non interseca la circonferenza in altri punti.

Queste definizioni si possono estendere a curve più generali? La definizione 1 certamente no: che cos'è il raggio di una parabola, ad esempio? La definizione 2 sembra più incoraggiante perché "funziona" anche per le coniche (parabole, ellissi, iperboli). Ma già per la curva $y = x^3$ non funziona: la retta tangente a questa curva in un punto generico (escluso l'origine) taglia la curva anche in un altro punto (**figura 3.1a**); viceversa ci sono curve, come $y = |x|$ che in un punto (l'origine) hanno infinite rette soddisfacenti questa definizione, ma intuitivamente nessuna di esse si può chiamare tangente (**figura 3.1b**).

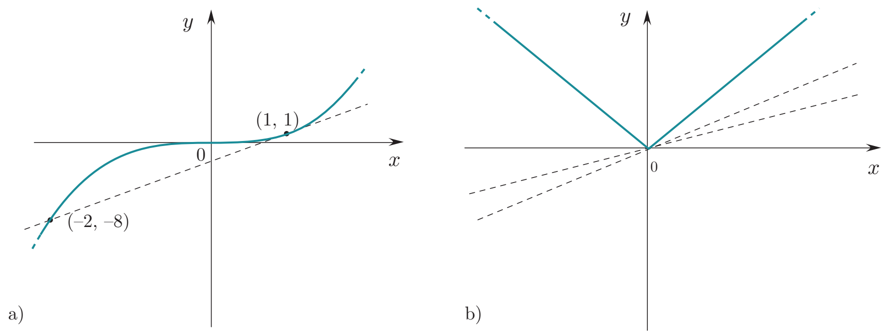


Figura 3.1 (a) La retta tangente alla curva $y = x^3$ nel punto $(1, 1)$ è $y = 3x - 2$, che taglia la curva anche in $(-2, -8)$; (b) la funzione $y = |x|$ ha infinite rette che tagliano il suo grafico solo nell'origine: nessuna di esse è "tangente".

Ci accorgiamo dunque di parlare comunemente di un oggetto geometrico ("retta tangente") di cui non sappiamo (ancora) dare una definizione precisa e generale.

In realtà non c'è speranza di definire la tangente come la retta che ha "meno intersezioni delle altre" con la curva. Ci vuole un'idea diversa. Geometricamente, la retta tangente può essere approssimata dalla retta che passa per due punti molto vicini posti sulla curva, il primo fissato (il punto di tangenza) e l'altro "mobile" (e scelto via via più vicino al punto di tangenza). Due punti individuano una retta; più i due punti si avvicinano, più questa retta si avvicinerà alla tangente; se però partissimo subito dal considerare "due punti coincidenti", avremmo un solo punto, per il quale passano infinite rette, e la retta che cerchiamo resterebbe indeterminata. Si tratta quindi di capire cosa accade della retta per i due punti quando il secondo punto, mobile, si avvicina sempre più al primo, senza però coincidere con esso. La "retta limite" – se esiste – si chiamerà retta tangente.

Un punto istruttivo di questa discussione è il seguente: senza il calcolo infinitesimale (in particolare, senza il concetto di limite) non si potrebbe non solo *risolvere* certi problemi, ma neppure *dar senso* ad essi (ad esempio, definire rigorosamente il concetto di retta tangente).

Dalla retta tangente ai problemi di massimo e minimo

Notiamo che il problema della determinazione della tangente è importante non solo da un punto di vista geometrico, ma anche per un'importante applicazione: è facile convincersi (vedi **figura 3.2**) che una curva il cui grafico sia "regolare" ha tangente orizzontale nei punti di massimo e di minimo (ed eventualmente anche in altri punti).

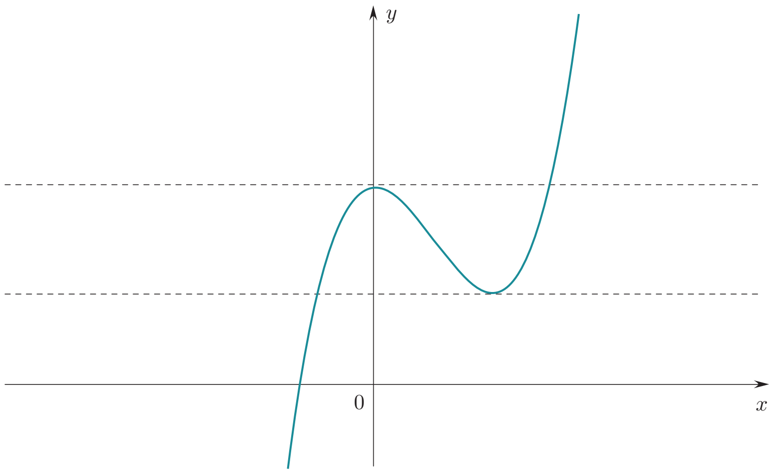


Figura 3.2 Rette tangenti a una curva nei suoi punti di massimo e minimo.

Perciò, per cercare i punti di massimo e minimo di una funzione, è utile saper scrivere analiticamente l'equazione della retta tangente alla curva in un punto generico, per vedere poi in quali punti essa è orizzontale. Questa idea si deve per primo a Fermat, che la elaborò intorno al 1630. Il calcolo differenziale, come vedremo, offre un metodo generale per impostare e risolvere i *problemi di massimo o minimo* nelle scienze applicate. Ne daremo qualche esempio nel paragrafo 5.3.

Che cos'è la velocità di un oggetto in moto?

Questo è un altro concetto che sembra ovvio ma non lo è. Consideriamo un punto materiale che si muove di moto vario, e proponiamoci di calcolare la sua velocità, nota la legge oraria del moto (ossia lo spazio percorso in funzione del tempo). Nella fisica galileiana l'unica velocità di cui si parla esplicitamente è la *velocità media*, ossia il rapporto tra lo spazio percorso in un certo intervallo di tempo e l'intervallo di tempo stesso; questo concetto è sufficiente per descrivere il moto uniforme. Ma in fenomeni come la caduta di un grave, o le oscillazioni di un pendolo, l'oggetto cambia velocità a ogni istante. Che cos'è la velocità istantanea? Intuitivamente, è la velocità media in un intervallo di tempo brevissimo. Ma come si può definire rigorosamente? E come si calcola effettivamente? Si noti che la parola "brevissimo" non ha alcun significato rigoroso, in matematica! Quello che si può pensare di fare è calcolare la velocità media in un intervallo di tempo *variabile* Δt, ossia il rapporto tra lo spazio percorso nell'intervallo di tempo Δt e l'intervallo Δt stesso, e cercare di capire a quale valore si avvicina questa quantità quando Δt diventa sempre più piccolo (ma diverso da zero: se $\Delta t = 0$ il procedimento perde significato, dandoci un rapporto $0/0$). L'introduzione consapevole di questa nozione di velocità istantanea si deve a Newton (inizio 1700), ed è uno degli elementi di novità assoluta della fisica newtoniana rispetto a quella galileiana e pregalileiana. Per Newton, come per noi, la velocità è la *derivata rispetto al tempo* della funzione $s(t) =$"spazio percorso nel tempo t", ovvero il limite a cui tende il rapporto tra lo spazio Δs percorso in un intervallo di tempo Δt e l'intervallo Δt, quando Δt diventa sempre più piccolo.

Dalla velocità di un oggetto al tasso istantaneo di variazione

Il concetto di velocità istantanea ha un significato molto più ampio di quello riferito agli oggetti in movimento: di *qualsiasi* grandezza variabile nel tempo (la temperatura di un oggetto, la numerosità di una popolazione,...) possiamo chiederci quale sia la sua velocità istantanea di variazione o, come spesso si dice in questi casi, il suo *tasso istantaneo di variazione*. D'altro canto, il contenuto di molte leggi fisiche consiste proprio nel descrivere il tasso istantaneo di variazione di certe grandezze. Comprendiamo allora come il *calcolo differenziale* (ovvero lo studio della nozione di derivata), che è parte del calcolo infinitesimale, sia inscindibilmente legato alla scienza moderna.

2 DERIVATA DI UNA FUNZIONE

2.1 Derivata e retta tangente

Riprendiamo ora da un punto di vista quantitativo la discussione fatta nel paragrafo precedente sul concetto di retta tangente; arriveremo così alla definizione di *derivata*.

Cartelli stradali del tipo mostrato in **figura 3.3**.

Figura 3.3
Cartello stradale che indica la pendenza della strada.

indicano la "pendenza media" del percorso. Nel caso indicato la pendenza media è del 10%. Che cosa vuol dire? Significa che ad ogni avanzamento di 1 km (in orizzontale) corrisponde un innalzamento (o un abbassamento) di circa 100 m = 0,1 km (**figura 3.4**).

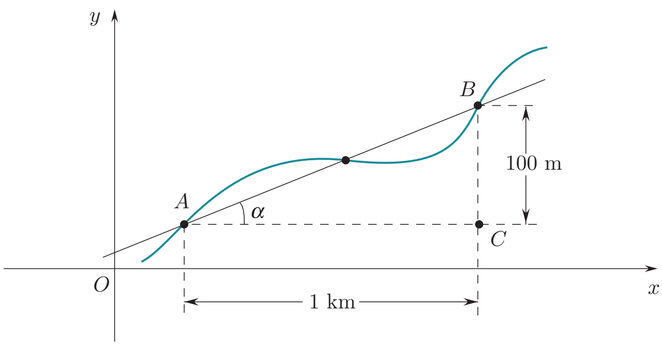


Figura 3.4
Pendenza media del 10%: muovendosi dal punto A al punto B si avanza in orizzontale di 1 km e in verticale di 100 m.

Il 10% che indica la pendenza è il rapporto

$$\frac{\text{variazione quota}}{\text{spostamento in orizzontale}},$$

Se f è derivabile in x_0, certamente la derivata destra e sinistra di f in x_0 esistono entrambe e sono uguali. Nel caso invece in cui f sia continua e derivabile *da destra e da sinistra* (ma non derivabile) in x_0 si dice che f ha un *punto angoloso in* $x = x_0$. ■

Dunque, $|x|$ ha un punto angoloso in $x = 0$.

Vale la pena ricordare la formula che esprime sinteticamente la derivata della funzione valore assoluto (fuori dall'origine):

$$|x|' = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ -1 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Punti a tangente verticale. Cuspidi

Se f è continua in un punto x_0 e

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty \quad \text{oppure} \quad -\infty$$

f non è derivabile in x_0 ma, geometricamente, il grafico di f ha una retta tangente ben definita e parallela all'asse delle ordinate. Ammetteremo in tal caso la scrittura $f'(x_0) = +\infty$, $f'(x_0) = -\infty$ e parleremo di *flesso a tangente verticale* (**figura 3.10**). Il concetto di flesso sarà definito più in generale nel paragrafo 6.1.

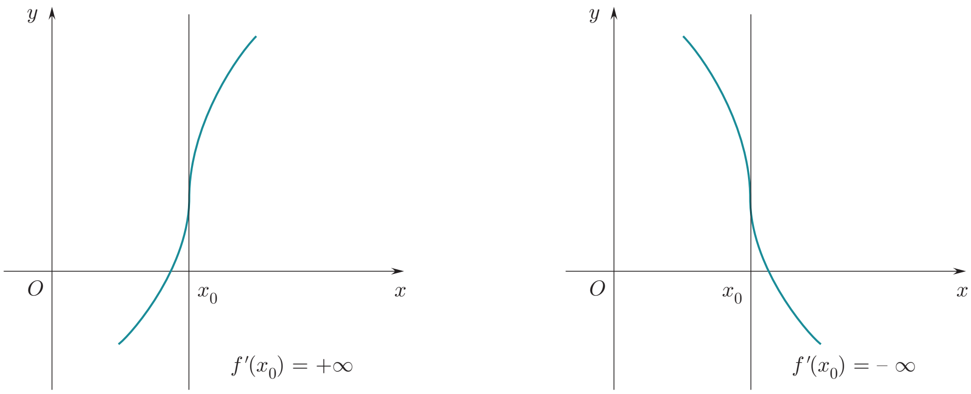


Figura 3.10 Esempi di funzioni con un punto di flesso a tangente verticale in x_0.

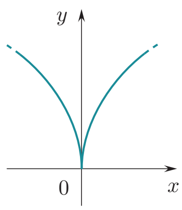


Figura 3.11 Grafico di $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$.

Ad esempio, la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ha un punto flesso a tangente verticale in $x = 0$.

Consideriamo ora la funzione $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$, il cui grafico è riportato in **figura 3.11**. In questo caso si ha $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$, e si dice che in $x = 0$ f ha una *cuspide*.

DEFINIZIONE 3.3 Se f è continua in x_0 e $f'_+(x_0) = \pm\infty$, $f'_-(x_0) = \mp\infty$ si dice che f ha in x_0 una *cuspide*. ■

Nel caso misto in cui f è continua, una delle due derivate è finita e l'altra infinita, si parla ancora di punto angoloso.

Infine, se la funzione è definita solo per $x \geq x_0$ e in tal punto ha derivata (destra) infinita, diremo semplicemente che in tal punto *ha tangente verticale*, senza parlare né di cuspide né di flesso. Ad esempio, la funzione $\sqrt{x}$ ha un punto a tangente verticale in $x = 0$.

■ 3 REGOLE DI CALCOLO DELLE DERIVATE

Esaminiamo ora la relazione tra l'operazione di derivata e le principali operazioni già note sulle funzioni; in particolare in questa parte mostreremo la relazione tra derivazione e operazioni algebriche $(\pm, \cdot, /)$ e tra derivazione e composizione, mentre nel paragrafo 4 tratteremo la relazione tra derivazione e inversione, oltre a dimostrare alcune delle formule che qui ci limitiamo a enunciare.

3.1 Algebra delle derivate

Teorema 3.2 *Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, derivabili in (a, b); allora $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g $(g \neq 0)$ sono derivabili in (a, b) e valgono le seguenti formule*

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \tag{3.2}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \tag{3.4}$$

In particolare, dalla (3.3) si deduce

$$(k \cdot f)' = k \cdot f' \qquad k \text{ costante} \tag{3.5}$$

essendo la derivata di una costante uguale a zero, e dalla (3.4) si deduce, per $f = 1$,

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \tag{3.6}$$

La (3.3) si dice *regola di Leibnitz* e si estende al prodotto di n fattori:

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \ldots + f_1 f_2 \cdots f_n'.$$

Come si vedrà dalla dimostrazione, il teorema ha in realtà un carattere *puntuale*, ossia: se f e g sono derivabili in un punto $x_0 \in (a, b)$, allora in quel punto sono derivabili anche $f + g$, $f \cdot g, \ldots$, e valgono le formule scritte. Solitamente comunque il teorema si applica nella forma in cui l'abbiamo enunciato (cioè in situazioni in cui f e g sono derivabili in tutti i punti di un intervallo).

Rimandiamo la dimostrazione del teorema precedente al paragrafo 3.4.

ESEMPI

3.2 Calcoliamo la velocità di un oggetto in moto rettilineo con legge oraria data da

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

La derivata della funzione $v_0 t$ è v_0 mentre quella di $\frac{1}{2} g t^2$ è $\frac{1}{2} g \cdot 2t = gt$ (usando 2 volte la (3.5)). Usando ora la (3.5) si trova

$$v(t) = s'(t) = v_0 + gt.$$

3.3 Calcoliamo la velocità di variazione del volume di una sfera rispetto al raggio.

Essendo $V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$, la velocità richiesta è (regola (3.5))

$$V'(r) = \frac{4}{3} \pi (3r^2) = 4\pi r^2$$

ossia: la derivata, rispetto al raggio, del volume della sfera, è pari alla superficie della sfera di raggio r. Il lettore cerchi di darsi una spiegazione geometrica del risultato ottenuto, in base alla definizione di derivata.

3.4 Calcoliamo la derivata di una funzione razionale, ad esempio,

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 4}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(x^3 - 2x + 1\right)' \left(x^2 - 4\right) - \left(x^2 - 4\right)' \left(x^3 - 2x + 1\right)}{\left(x^2 - 4\right)^2} \\ &= \frac{\left(3x^2 - 2\right)\left(x^2 - 4\right) - 2x\left(x^3 - 2x + 1\right)}{\left(x^2 - 4\right)^2} \\ &= \frac{x^4 - 10x^2 - 2x + 8}{\left(x^2 - 4\right)^2}. \end{aligned}$$

3.2 Derivata di una funzione composta

Teorema 3.3 (Regola della catena) *Sia $g \circ f$ la funzione composta di due funzioni f e g. Se f è derivabile in un punto x e g è derivabile in $y = f(x)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale la formula:*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \tag{3.7}$$

Il prossimo argomento, anche se non del tutto rigoroso, contiene l'idea del perché la formula precedente è vera. Scriviamo il rapporto incrementale della funzione composta moltiplicando e dividendo per la stessa quantità $f(x+h) - f(x)$:

$$\frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ponendo $k = f(x+h) - f(x)$ si ha quindi $f(x+h) = f(x) + k$ e l'identità precedente si riscrive così:

$$\frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{3.8}$$

Per $h \to 0$ si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to f'(x). \tag{3.9}$$

Inoltre, poiché f è continua in quanto derivabile, $k = f(x+h) - f(x) \to 0$ per $h \to 0$ e perciò

$$\frac{g(f(x)+k) - g(f(x))}{k} \to g'(f(x)). \tag{3.10}$$

Combinando (3.8), (3.9), (3.10) si ha la tesi. Il problema dell'argomentazione precedente è che la quantità $k = f(x+h) - f(x)$ per cui abbiamo diviso e moltiplicato potrebbe annullarsi anche per qualche $h \neq 0$. Questa dimostrazione quindi è valida solo sotto l'ipotesi aggiuntiva (molto spesso verificata) che sia $f(x+h) - f(x) \neq 0$ definitivamente per $h \to 0$. Una dimostrazione di questo teorema di validità generale sarà data nel paragrafo 4.

La (3.7) si chiama *regola della catena*; usando le notazioni (di Leibniz) df/dx e dg/dx per le derivate di f e g e posto $w = g(y)$, la (3.7) acquista una forma più significativa:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \text{(come se } dy \text{ si semplificasse).} \tag{3.11}$$

La (3.11) esprime il fatto che il tasso di variazione di w rispetto a x è il prodotto dei tassi di variazione " intermedi", di w rispetto a y e di y rispetto a x.

Come suggerisce il nome di "regola della catena", la (3.11) può essere generalizzata alla composizione di un numero qualsiasi di funzioni, composte una con l'altra. Ad esempio per tre funzioni si ha

$$[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Per usare questa regola, insieme alle altre dell'algebra delle derivate, occorre imparare a *vedere* una funzione complicata come composizione successiva di funzioni più semplici. Per individuare le componenti può essere utile immaginare come si calcola la funzione composta mediante una calcolatrice.

ESEMPI

3.5 Si voglia derivare

$$w(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Per calcolarla, occorre inserire il valore di x, calcolare $1+x^2$ e poi prendere la radice quadrata del risultato:

$$x \overset{1+(\cdot)^2}{\longmapsto} 1+x^2 \overset{\sqrt{(\cdot)}}{\longmapsto} \sqrt{1+x^2}.$$

Posto

$$f(x) = 1 + x^2,\ g(y) = \sqrt{y},$$

si ha allora $w(x) = g(f(x))$. Pertanto:

$$w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Usando la (3.11) si scriverebbe $y = 1 + x^2$, $w = \sqrt{y}$ e quindi

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x.$$

3.6 **Derivata del cambiamento di scala** Un caso particolare di derivazione della funzione composta che si presenta molto spesso è la derivata di una funzione

$$f(ax + b),$$

che si può interpretare come la funzione f applicata ad un cambio di scala sulla variabile x. Applicando la regola di derivazione della funzione composta in questo caso si ha semplicemente

$$\frac{d}{dx}[f(ax+b)] = af'(ax+b)$$

(poiché $\frac{d}{dx}(ax+b) = a$), una formula che si usa molto frequentemente. Ad esempio,

$$\left(\sqrt{5x+3}\right)' = \frac{5}{2\sqrt{5x+3}} \text{ perché } \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

3.7 **Valore assoluto di una funzione** Consideriamo una funzione del tipo

$$|f(x)|.$$

Sappiamo che il valore assoluto non è derivabile là dove il suo argomento si annulla. Tuttavia, nei punti in cui $f(x) \neq 0$, la derivazione della funzione composta dà:

$$|f(x)|' = f'(x) \cdot \operatorname{sgn}(f(x)) = \begin{cases} f'(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ -f'(x) & \text{se } f(x) < 0. \end{cases}$$

In generale, ci aspettiamo che la funzione $|f(x)|$ abbia dei punti angolosi nei punti in cui $f(x) = 0$. Ad esempio, $\left|x^2 - 1\right|$ ha punti angolosi in $x = \pm 1$.

3.8 **Derivata di alcune funzioni logaritmiche** Prendendo per buona per ora la regola di derivazione della funzione $\log x$ enunciata nel paragrafo 2.3 e che dimostreremo nel paragrafo 3.4, osserviamo come si derivano alcune funzioni composte di tipo logaritmico. Anzitutto, per derivazione della funzione composta, si ha

$$(\log|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{x} \text{ (senza modulo!)}.$$

Si osservi anche il seguente calcolo:

$$\begin{aligned} \left(\log\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)\right)' &= (\log(ax+b) - \log(cx+d))' \\ &= \frac{a}{ax+b} - \frac{c}{cx+d} \end{aligned}$$

(ossia, talvolta conviene usare le proprietà dei logaritmi per trasformare una funzione logaritmica *prima* di calcolarne la derivata).

3.9 **Derivata logaritmica** Come vedremo in seguito, è spesso utile calcolare la derivata di una funzione composta del tipo

$$g(x) = \log f(x).$$

Dal teorema di derivazione della funzione composta e la regola di derivazione del logaritmo si ha subito:

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

La derivata di $\log f(x)$ si chiama anche *derivata logaritmica* di $f(x)$. Per quanto osservato sulla derivata di $\log |x|$ si ha anche

$$(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

senza valore assoluto a secondo membro.

3.10 **Derivate di funzioni $f(x)^{g(x)}$** Possiamo ora calcolare anche la derivata di una qualsiasi funzione $f(x)^{g(x)}$ con $f(x) > 0$, utilizzando il seguente "trucco" di uso comune: riscrivere $f(x)^{g(x)}$ nella forma seguente:

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}.$$

Si è sfruttata la definizione di logaritmo $e^{\log A} = A$ e la proprietà dei logaritmi $\log[f(x)^{g(x)}] = g(x)\log f(x)$. A questo modo, sfruttando la derivata logaritmica, si può calcolare la derivata di una funzione di questo tipo:

$$\begin{aligned}\left[f(x)^{g(x)}\right]' &= \left[e^{g(x)\log f(x)}\right]' = e^{g(x)\log f(x)} \cdot [g(x)\log f(x)]' \\ &= f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].\end{aligned}$$

Ad esempio,

$$(x^x)' = \left(e^{x\log x}\right)' = \left(e^{x\log x}\right) \cdot (x\log x)' = x^x \cdot (\log x + 1).$$

3.3 Derivata di una funzione inversa

Il prossimo teorema ci consentirà, tra l'altro, di dimostrare le formule di derivazione del logaritmo e delle funzioni trigonometriche inverse, che abbiamo enunciato nel paragrafo 2.3.

Teorema 3.4 *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e invertibile in (a,b) e $g = f^{-1}$ la sua inversa, definita in $f((a,b))$. Supponiamo inoltre che esista $f'(x_0) \neq 0$ per un certo $x_0 \in (a,b)$. Allora g è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{3.12}$$

Osserviamo che, assumendo la derivabilità di f^{-1}, la (3.12) segue subito dall'identità $g(f(x)) = x$ e dalla regola della catena:

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

da cui, se $f'(x) \neq 0$, la (3.12). La dimostrazione che abbiamo dato, tuttavia, è necessaria per *dedurre* la derivabilità di g dalle nostre ipotesi su f.

La (3.12) ha un semplice significato geometrico, ricordando che i grafici di f e $g = f^{-1}$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$ (si veda la **figura 3.12**).

Con la notazione di Leibniz, posto $y = f(x)$, $x = g(y)$, (3.12) si scrive nella forma

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{(come se } \frac{dx}{dy} \text{ fosse un quoziente algebrico!)}$$

Si faccia attenzione al fatto che nella formula di derivazione della funzione inversa, le derivate f' e g' sono calcolate in *due punti diversi*: è questa la principale attenzione da avere nell'applicazione di questo teorema, come mostreranno i prossimi esempi.

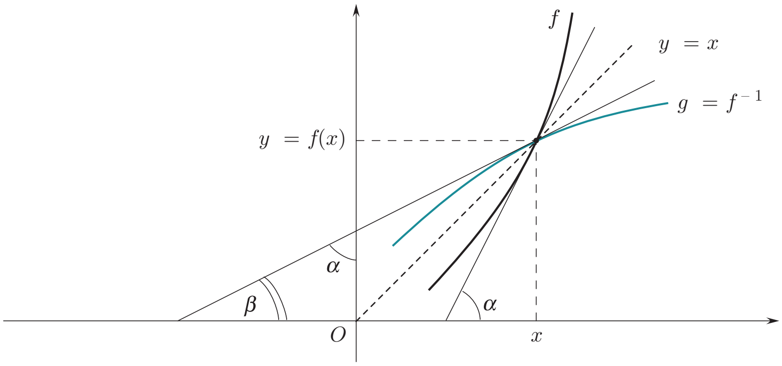


Figura 3.12 Gli angoli α e β sono complementari ($\alpha + \beta = \pi/2$) e quindi $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 1/(\operatorname{tg}\beta) = 1/(g'(y))$.

ESEMPI

3.11 **Derivata del logaritmo** Prendendo momentaneamente per buone le regole di calcolo delle funzioni esponenziali enunciate nel paragrafo 2.3 (e su cui torneremo nel paragrafo 3.4), mostriamo come da queste si possano dedurre, mediante il teorema precedente, le derivate delle funzioni logaritmiche.

Sappiamo che $x = \log_a y$ è la funzione inversa di $y = a^x$, perciò:

$$(\log_a y)' = \frac{1}{(a^x)'} = \frac{1}{a^x \log a} = \frac{1}{y \log a}.$$

Tornando a indicare la variabile indipendente con x possiamo scrivere la formula ottenuta nella forma più consueta

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

e in particolare, per $a = e$,

$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

3.12 **Derivata delle funzioni trigonometriche inverse** Prendendo per buone le regole di calcolo delle derivate delle funzioni seno, coseno e tangente enunciate nel paragrafo 2.3, che dimostreremo nel paragrafo 4.2, mostriamo come da queste si possano dedurre, mediante il teorema precedente, le derivate delle corrispondenti funzioni inverse arcoseno, arcocoseno, arcotangente.

Poniamo $y = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} y$ con $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $y \in \mathbb{R}$.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg} x)^2} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Poniamo ora $y = \sin x$, $x = \arcsin y$, con $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $y \in [-1, 1]$. Poiché per quei valori di x si ha $\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2} = \sqrt{1 - y^2}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Analogamente, se $y = \cos x$, $x = \arccos y$ con $x \in [0, \pi]$, $y \in [-1, 1]$,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1 - y^2}}.$$

Si osservi che le funzioni $\arcsin x, \arccos x$, pur essendo definite e continue in $[-1, 1]$, non sono derivabili agli estremi dell'intervallo: precisamente, in questi punti hanno retta tangente verticale (perciò la derivata è infinita).

L'utilità del teorema di derivazione della funzione inversa consiste nel fatto che permette di calcolare la derivata di g anche in situazioni in cui g non si sa scrivere esplicitamente:

ESEMPIO 3.13 Sia $f(x) = x + e^x$. La funzione è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$, perché somma di due funzioni strettamente crescenti. Perciò è invertibile (capitolo 2, teorema 2.4); sia g la sua inversa. Calcoliamo, ad esempio, $g'(y_0)$ per $y_0 = f(0) = 1$. Si ha

$$f'(x) = 1 + e^x; \quad f'(0) = 2 \neq 0; \quad g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Si noti che grazie al teorema di derivazione della funzione inversa abbiamo saputo calcolare $g'(1)$ in una situazione in cui non conosciamo l'espressione analitica di $g(x)$.

3.4 Dimostrazioni di alcune formule di calcolo delle derivate

Proveremo ora alcune delle formule di calcolo delle derivate enunciate nei paragrafi 3.1, 3.2 e 3.3.

Derivata di x^n

Dimostrazione. Proviamo la regola per la derivata di una potenza a esponente *intero positivo* qualsiasi. Una dimostrazione dell'analoga regola per esponente reale qualsiasi sarà data nel paragrafo 4.2.

Per $f(x) = x^n$ si ha

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

utilizzando la formula per lo sviluppo del binomio di Newton (capitolo 1, paragrafo 6.4),

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\left(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n\right) - x^n}{h} \\ &= \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n}{h} \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \to nx^{n-1}\end{aligned}$$

per $h \to 0$, che è la regola 6 della tabella 3.1 per $\alpha = n$ intero positivo. ◆

Algebra delle derivate

Dimostrazione. Lasciamo per esercizio la dimostrazione della (3.2), molto semplice. Dimostriamo la (3.3): fissato $x \in (a, b)$, possiamo scrivere

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)$$

e quindi

$$\begin{aligned}&\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \to f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\end{aligned}$$

poiché $f(x+h) \to f(x)$ quando $h \to 0$, essendo f continua in quanto derivabile. Proviamo ora la (3.6):

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] &= \frac{g(x) - g(x+h)}{hg(x)g(x+h)} = \\ &= -\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)} \to -\frac{g'(x)}{g(x)^2},\end{aligned}$$

dove si è sfruttato ancora il fatto che, essendo derivabile, g è continua, perciò $g(x+h) \to g(x)$ per $h \to 0$.

Notiamo infine che dalle (3.6) e (3.3) si deduce anche la (3.4), infatti:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)' &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \text{ per la (3.3) applicata a } f \text{ e } \frac{1}{g}\\ &= f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = \text{ per la (3.6)}\\ &= f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \text{ cioè la (3.4).}\end{aligned}$$

◆

Derivata di una funzione composta

Dimostrazione. Si ha $(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) = g(f(x+h)) - g(f(x))$.

Se poniamo

$$k = f(x+h) - f(x), \qquad y = f(x),$$

allora $f(x+h) = y + k$, e per la continuità di f, $h \to 0$ implica $k \to 0$. Con le nuove notazioni,

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(y+k) - g(y).$$

Osserviamo ora che la definizione di derivata

$$g'(y) = \lim_{k \to 0} \frac{g(y+k) - g(y)}{k}$$

si può riscrivere, per $k \neq 0$,

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k} = g'(y) + \varepsilon(k),$$

dove $\varepsilon(k)$ indica una quantità che tende a zero per $k \to 0$. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione precedente per k si trova

$$g(y+k) - g(y) = g'(y) \cdot k + \varepsilon(k) \cdot k$$

relazione valida anche per $k = 0$. Dunque:

$$g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big) = g'(y) \cdot k + \varepsilon(k) \cdot k$$

Dividendo per h, e osservando che $k/h \to f'(x)$ si ottiene la (3.7). ◆

Derivata di una funzione inversa

Dimostrazione. Sia $f(x_0) = y_0$; $g(y_0) = x_0$;

$$f(x_0 + h) = y_0 + k; \qquad g(y_0 + k) = x_0 + h$$

Consideriamo il rapporto incrementale di g in y_0:

$$\frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} = \frac{h}{f(x_0+h) - f(x_0)}$$

se $k \neq 0$, $f(x_0+h) - f(x_0) \neq 0$ e quindi anche $h \neq 0$; dunque l'ultimo quoziente si può riscrivere anche nella forma

$$\frac{1}{\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}.$$

Inoltre, per $k \to 0$ si ha $g(y_0+k) \to g(y_0)$ perché g è continua, essendo l'inversa di una funzione continua su un intervallo (si veda il teorema 2.5 del capitolo 2); d'altro canto $h = g(y_0+k) - g(y_0)$, quindi per $k \to 0$ anche $h \to 0$, e per ipotesi

$$\frac{1}{\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}} \to \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Quindi g è derivabile e

$$g'(y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{g(y_0+k) - g(y_0)}{k} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

◆

4 LE FUNZIONI TRASCENDENTI ELEMENTARI: DERIVATE E LIMITI NOTEVOLI

Tra le regole di derivazione delle funzioni elementari che abbiamo enunciato nel paragrafo 2.3, finora non abbiamo dimostrato quelle che riguardano le funzioni esponenziali, trigonometriche, e le potenze a esponente reale qualsiasi. Lo faremo in questo paragrafo. Vedremo che questo da una parte richiederà alcuni risultati "fini" sul calcolo dei limiti, che finora non avevamo incontrato, d'altro canto metterà in luce certe proprietà importanti delle funzioni esponenziali e trigonometriche, che ne giustificano la presenza in molti modelli fisici.

4.1 Limiti notevoli

Presentiamo qui alcuni risultati, importanti e non banali, che riguardano i limiti delle funzioni trigonometriche ed esponenziali, insieme ad alcune loro conseguenze. Questi serviranno a dimostrare le formule di calcolo delle derivate di queste funzioni, ma costituiscono anche strumenti utili al calcolo di limiti più complessi di quelli incontrati nel capitolo 2.

Limiti notevoli di seno e coseno

Il prossimo teorema raccoglie alcuni risultati importanti sui limiti delle funzioni trigonometriche:

Teorema 3.5 (Limiti notevoli trigonometrici) *Valgono i seguenti limiti:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{3.13}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{3.14}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \tag{3.15}$$

Si osservi che tutti e tre i limiti danno una forma di indeterminazione del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$, che non è possibile risolvere con semplici passaggi algebrici. Questo fatto è ciò che rende questi limiti "notevoli".

Dimostrazione. Osserviamo subito che, essendo $\sin x$ e x funzioni dispari, $\sin x/x$ è funzione pari e quindi è sufficiente calcolare $\lim_{x \to 0^+} \sin x/x$.

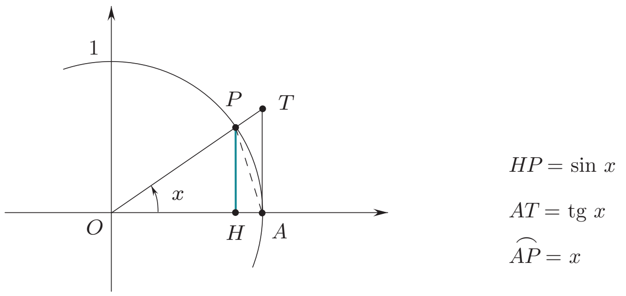


Figura 3.13 Rappresentazione grafica della disuguaglianza $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

A tale scopo, osservando la **figura 3.13** si vede che l'area del triangolo OPA è minore di quella del settore circolare OPA, a sua volta minore di quella del triangolo OTA. Ne segue

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x,$$

ossia

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

ESERCIZI

Calcolo di derivate, punti di non derivabilità

3.1 Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ *nel punto* $(x_0, f(x_0))$.

	$f(x)$	x_0		$f(x)$	x_0
(a)	$\sin x$	$\frac{\pi}{3}$	(e)	$\log x$	1
(b)	$(x \log\lvert x\rvert)^3$	-1	(f)	e^{x^2}	$\log 2$
(c)	$3x^2 + 2x + 1$	2	(g)	a^x	2
(d)	$\cos(\log x)$	$e^{\pi/2}$	(h)	$e^{-\lvert x\rvert}$	-1

3.2 Utilizzando la definizione di derivata, determinare il comportamento nell'origine delle seguenti funzioni (tangente orizzontale, cuspide, flesso a tangente verticale...):

$$y = x^{1/3}, \quad y = x^{4/3}, \quad y = x^{2/3},$$
$$y = x^{5/3}, \quad y = x^{1/2}, \quad y = x^{3/2}.$$

(Questo argomento permette di completare la giustificazione del grafico delle funzioni potenza a esponente razionale o reale, che abbiamo descritto nel paragrafo 5.1 del capitolo 2).

3.3 Sia $f = f(t)$ una grandezza fisica variabile nel tempo t. Per le seguenti funzioni f, calcolare la velocità istantanea di variazione $v = v(t)$.

(a) $\dfrac{a + be^{-kt}}{c + de^{-kt}}$ $\qquad (c)$ $At \sin(\omega t)$

(b) $e^{\alpha t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$ $\qquad (d)$ Ate^{kt}

3.4 Sia $x = x(t)$ la legge oraria di un punto in moto su una retta. Nei seguenti casi calcolare velocità $v = v(t)$ e accelerazione $a = a(t)$.

(a) $a\dfrac{t^3}{T} + 3bt^2 + x_0$ $\qquad (c)$ $gt^2\sqrt{\omega t + b}$ $(t > 0)$

(b) $\dfrac{at^2}{1 + \omega t}$ $\qquad (d)$ $bt\sqrt[3]{t^2 - T^2}$

Le lettere diverse da t indicano parametri costanti.

3.5 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni $f(x)$ (specificando i punti in cui eventualmente non esiste). Ogni eventuale lettera diversa da x va trattata come un parametro (costante).

(a) $x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ $\qquad (g)$ $\sqrt{x}\left(x^3 - 2x + 1\right)$

(b) $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$ $\qquad (h)$ $R^2 x + 3Rx^2 + \dfrac{2R^4}{x}$

(c) $\lvert x\rvert\left(x^2 + 2x + 3\right)$ $\qquad (i)$ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

(d) $x\left\lvert x^2 - 1\right\rvert$ $\qquad (l)$ $x^a\sqrt{bx + c}$

(e) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2 - 2}}$ $\qquad (m)$ $\sqrt[3]{ax^2 + bx + c}$

(f) $x\sqrt{x^2 - 3x + 1}$

3.6 In base alle regole di calcolo delle derivate e alla **tabella 3.1** delle derivate delle funzioni elementari, calcolare la derivata delle seguenti funzioni $f(x)$ (specificando i punti in cui eventualmente non esiste). Ogni eventuale lettera diversa da x va trattata come un parametro (costante).

(a) $3x^4 + 5x + x^{3/2} - 2x^{-3}$ $\qquad (l)$ $x \cos\dfrac{1}{x}$

(b) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x + 5}$ $\qquad (m)$ $\dfrac{2\sin x - 3\cos x}{\cos x + 4}$

(c) $e^{-x}\left(x^2 - 4x + 3\right)$ $\qquad (n)$ $xe^{-\lvert x^2 + 2x\rvert}$

(d) $\dfrac{ax + b}{cx + d}$ $\qquad (o)$ $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x$

(e) $e^{-2x}(\cos 3x - 2\sin 3x)$ $\qquad (p)$ $e^{-x^2}\log_2\lvert x\rvert$

(f) $x\log(3x)$ $\qquad (q)$ $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(g) $\log\left\lvert\dfrac{x+2}{3-x}\right\rvert$ $\qquad (r)$ $\log\lvert\log x\rvert$

(h) $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$, $a > 0$ $\qquad (s)$ $e^{\frac{x+2}{x-3}}$

(i) $\dfrac{2 + 3e^{-x}}{1 - e^x}$ $\qquad (t)$ $2^{x^2 + 3x}$

3.7 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, semplificando se possibile l'espressione ottenuta. Studiare il segno della derivata, nei casi un cui questo è agevole.

(a) $\log(3x - 2)$ $\qquad (c)$ $\left(x^2 - 3x + 1\right)\log x$

(b) $x \log x$ $\qquad (d)$ $\log\left(\dfrac{2x-1}{3x+2}\right)$

3.8 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni, dove esiste. Studiare i punti di non derivabilità, stabilendo se si tratta di punti angolosi (in questo caso, calcolare la derivata destra o sinistra), punti di cuspide, flessi a tangente verticale, punti a tangente verticale, tracciando un grafico locale della funzione in quei punti. Prima di eseguire il calcolo della derivata, cercare di prevedere quali saranno i punti di non derivabilità, in base alla forma della funzione.

(a) $\left\lvert x^2 + 3x - 4\right\rvert$ $\qquad (d)$ $e^{\sqrt{x}}$

(b) $\left\lvert x^3\right\rvert$ $\qquad (e)$ $e^x\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-3}}$

(c) $\sqrt[3]{2x^2 + x - 1}$ $\qquad (f)$ $\log^2\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)$

Calcolo di limiti utilizzando i limiti notevoli

3.9 Calcolare i seguenti limiti utilizzando anche, dove è utile, i limiti notevoli studiati nei teoremi 3.5 e 3.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(3x^2\right)-1}{x^2\sin^2 x} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-2/x^2}-1\right)(x+1)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log^2(1-5x)}{5x\sin(2x)} \qquad \lim_{x\to 0^\pm}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x^2\cos x}$$

Esercizi su massimi e minimi di una funzione

3.10 Dopo aver stabilito il dominio delle seguenti funzioni, determinarne i punti di massimo e minimo relativo.

(a)	x^2e^x	(e)	$x^2\log x$
(b)	x^3+x^2-x+1	(f)	$e^{2x}\left(x^2-2x-1\right)$
(c)	$\sqrt[3]{x}e^x$	(g)	$\sqrt{x}\log x$
(d)	$\dfrac{e^{-2x}+2}{e^{-x}+5}$	(h)	$\dfrac{x+2}{x^2+1}$

Problemi di massimo e minimo

Impostare e risolvere i seguenti problemi di massimo o minimo, cercando di imitare le tecniche illustrate negli esempi del paragrafo 5.3. In particolare, impostare il problema in modo da ridurlo ad un problema di massimizzazione o minimizzazione di una funzione di una variabile.

3.11 Si vuole costruire una scatola, senza coperchio, col vincolo che la base sia quadrata e la superficie totale della scatola misuri 108 cm. Di quali dimensioni (lato della base e altezza) dev'essere affinché il volume sia il massimo possibile? E quanto sarà il volume?

3.12 Una ditta produttrice di birra desidera minimizzare il costo della lattina. Essendo di materiale omogeneo e volume fissato occorre minimizzare la superficie totale del cilindro di volume pari a 33 cl. Quali sono le dimensioni (altezza e diametro) della lattina ottimale? Esprimere il risultato mediante il rapporto tra altezza e diametro.

3.13 Determinare il cilindro di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R. Calcolare il rapporto tra altezza e raggio del cilindro massimizzante. Il volume del cilindro massimo è maggiore o minore di metà del volume della sfera?

3.14 Determinare il parallelepipedo a base quadrata di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R. È un cubo? Il volume del parallelepipedo massimo è maggiore o minore di metà del volume della sfera? (Il problema fu risolto da Keplero).

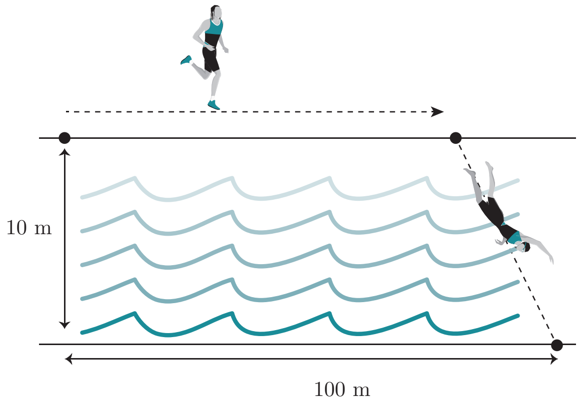
3.15 Consideriamo una circonferenza di raggio r. Si vuole determinare per quale angolo θ il settore circolare ha minimo perimetro, fissata la sua area. Si tenga presente che, misurando l'angolo in radianti,

(i) l'area del settore circolare è $A=\frac{1}{2}\theta r^2$;

(ii) il perimetro del settore circolare è $p=2r+r\theta$.

Perciò, fissata l'area $A>0$, si chiede di trovare per quale θ il perimetro p è minimo e quanto vale tale perimetro minimo.

3.16 Un uomo deve raggiungere un punto che si trova sull'altra sponda di un fiume, 100 metri più a valle; il fiume è rettilineo e largo 10 metri; l'uomo può correre sulla sponda del fiume con velocità v, quindi tuffarsi e attraversare a nuoto il fiume, con velocità inferiore, pari a δv $(0<\delta<1)$. Determinare dopo quanti metri di corsa l'uomo si deve tuffare, affinché sia minimo il tempo impiegato a raggiungere la meta. Se l'uomo è un nuotatore provetto, δ sarà quasi uguale a 1: determinare il valore esatto di δ per il quale all'uomo conviene tuffarsi immediatamente, senza percorrere neanche un metro sulla terraferma.



3.17 Con riferimento al problema precedente, supponiamo ora che l'uomo si trovi sulla riva di un lago circolare di raggio R e debba raggiungere il punto diametralmente opposto. L'uomo può correre sulla sponda (circolare) del lago con velocità v, quindi tuffarsi e attraversare a nuoto il fiume, con velocità inferiore, pari a δv $(0<\delta<1)$. Si rappresenti la situazione tracciando la circonferenza di centro l'origine e raggio R, scegliendo come punto di partenza il punto $(R,0)$, e assumendo come incognita del problema l'angolo θ che individua il punto della circonferenza in cui l'uomo decide di tuffarsi. Determinare θ che rende minimo il tempo della traversata.

9 Statistica

Nel capitolo precedente abbiamo visto come attraverso il calcolo delle probabilità sia possibile trattare l'*incertezza* in termini matematici, sviluppando delle regole con cui noi attribuiamo un certo grado di fiducia al realizzarsi di un dato evento. In molte situazioni concrete possiamo formulare un modello probabilistico in base al quale calcolare la probabilità di un evento. Abbiamo imparato, ad esempio, come calcolare la probabilità di ottenere piante di piselli con fiori bianchi negli esperimenti di Mendel.

In questo capitolo introdurremo alcune nozioni fondamentali della Statistica, che ci permetteranno di descrivere con altri strumenti situazioni di incertezza, di prendere decisioni in tali situazioni e insieme di dare valutazioni quantitative del grado di certezza che abbiamo circa le decisioni prese.

Inizieremo con un cenno alla statistica descrittiva in cui introdurremo l'analisi dei dati. Ci dedicheremo quindi alla statistica inferenziale in cui affronteremo il problema della stima (puntuale e intervallare) di parametri e la verifica di un'ipotesi statistica.

1 CHE COS'È LA STATISTICA?

Quotidianamente siamo bersagliati da dati statistici. Spesso, le informazioni sono riferite nel contesto di una notizia descritta dal quotidiano che leggiamo o fornita in un telegiornale. Qualche volta i dati sono offerti attraverso percentuali o medie: "*Giovani inglesi: l'80% non sa leggere una carta stradale. Non sono in grado di capire una mappa e senza i navigatori satellitari si sentono persi*"; oppure *"Elezioni regionali. Sondaggi: previsto crollo affluenza. Secondo i sondaggi, anche alle 15 l'affluenza sarà molto più bassa rispetto a quella delle ultime elezioni: nelle elezioni regionali del Lazio, Ipsos prevede il 54%, BiDiMedia il 56%, Quorum 55,7%"*. Altre volte si tratta di tabelle o grafici, come in **figura 9.1**.

Ma che cos'è di preciso la *statistica*? La parola deriva dal latino *status*. Originariamente, infatti, la statistica si occupava delle rilevazioni ufficiali da parte di istituzioni statali. Ghislini nel 1589 indica la statistica come *descrizione delle qualità che caratterizzano e degli elementi che compongono uno Stato*. Nasce quindi come una scienza sociale che studia le *popolazioni umane*. Oggi con il termine *statistica* indichiamo lo studio dei fenomeni collettivi (ossia di quei fenomeni che riguardano una *pluralità di elementi*), che hanno attitudine a variare. Chiamiamo *popolazione* questa pluralità di elementi oggetto del nostro studio e della quale vogliamo conoscere uno o più aspetti. Le popolazioni di cui si occupa la statistica non sono solo le popolazioni umane, anzi. Possono essere persone come gli studenti di una scuola o gli elettori di una regione o gli abitanti di un quartiere; oppure oggetti (libri, pezzi prodotti da un macchinario..), o un generico insieme di elementi. La popolazione può essere finita se ad esempio esaminiamo tutte le mucche da latte dell'Emilia Romagna in un determinato periodo di tempo, oppure illimitata come una ipotetica sequenza di testa e croce ottenuta lanciando una moneta un numero infinito di volte. Può essere reale o ipotetica; l'importante è che possa essere definita in modo chiaro.

ESEMPIO

9.9 La **tabella 9.9** descrive la distribuzione delle frequenze dell'età di 40 individui, raggruppate per classi.

Tabella 9.9 Frequenze dell'età di 40 persone, raggruppate in 3 classi.

Classi di età (anni)	Numero persone (frequenze)
(0, 20]	35
(20, 40]	4
(40, 60]	1
totale	40

Vogliamo calcolare la media ponderata.

Innanzitutto andiamo a sostituire a ciascun intervallo il termine centrale come in **tabella 9.10**.

Tabella 9.10 Termini centrali delle classi di frequenza della tabella 9.9.

Termini centrali	Numero persone (frequenze)
$a_1 = 10$	$f_1 = 35$
$a_2 = 30$	$f_2 = 4$
$a_3 = 50$	$f_3 = 1$
totale	40

Quindi calcoliamo la media ponderata:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = \frac{10 \cdot 35 + 30 \cdot 4 + 50 \cdot 1}{40} = \frac{520}{40} = 13.$$

Si osservi che nell'esempio 9.8 la media ottenuta è uguale a quella ottenuta dai dati grezzi, mentre nell'esempio 9.9 o nel caso di una variabile continua abbiamo soltanto un'approssimazione.

Introduciamo ora un altro indice di posizione detto *mediana*. Si tratta di un valore che, in un certo senso, occupa il posto centrale delle osservazioni disposte in ordine crescente. La definizione precisa è la seguente.

Definizione 9.2 (Mediana) Ordiniamo i dati osservati dal più piccolo al più grande. Se il numero totale delle osservazioni n è dispari la mediana corrisponde al dato che occupa la posizione centrale, ossia quello in posizione $(n + 1)/2$. Se, invece, n è pari la mediana è calcolata come la media aritmetica dei valori che occupano le posizioni $n/2$ e $n/2 + 1$.

Notiamo che la mediana è un valore tale che almeno metà dei dati è minore o uguale di esso e almeno metà dei dati è maggiore o uguale di esso.

ESEMPI

9.10 Di seguito sono riportati i rendimenti dello scorso anno di 9 fondi comuni specializzati in aziende di piccole dimensioni:

53,8 44,5 59,3 39,2 37,3 44,2 56,6 66,5 62,4.

Vogliamo determinare la mediana. Per prima cosa ordiniamo i dati dal valore più piccolo a quello più grande:

37,3 39,2 44,2 44,5 53,8 56,6 59,3 62,4 66,5.

Abbiamo $n = 9$ dati per cui la mediana sarà l'osservazione di posto centrale (in posizione $(n + 1)/2 = (9 + 1)/2 = 5$), ossia il numero 53,8.

9.11 Calcoliamo la mediana dei dati dell'esempio 9.7. I numeri

10 6 7 15 8 4 0 11 9 8

corrispondono ai leoni avvistati nel parco nazionale del Kafue nella zona di Ngoma nei primi 10 giorni dello scorso ottobre. Per calcolare la mediana come prima cosa riscriviamo i dati in ordine crescente:

0 4 6 7 8 8 9 10 11 15.

In questo caso abbiamo a disposizione $n = 10$ osservazioni. La mediana, dunque, è la media aritmetica dei valori che occupano le posizioni $10/2 = 5$ e $10/2 + 1 = 5 + 1 = 6$, ossia il numero 8.

9.12 Determinare la mediana della distribuzione di voti riportati in **tabella 9.11**.
Dalla tabella della distribuzione delle frequenze riusciamo in questo caso a risalire ai dati grezzi. Li ordiniamo in modo crescente:

$$5\ 5\ 5\ 5\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6\ 7\ 7\ 7\ 7\ 8\ 8\ 9.$$

Il numero delle osservazioni è $n = 19$. Il termine centrale è l'osservazione in decima posizione: lascia alla sua destra e alla sua sinistra un eguale numero di termini.

La *mediana* è uguale a 6.

Voto	Frequenza
5	4
6	8
7	4
8	2
9	1

Tabella 9.11
Dati relativi all'esempio 9.12.

Se non abbiamo a disposizione dati grezzi, ma raggruppati per classi, possiamo determinare la *classe mediana* nella quale ricade l'osservazione che divide l'insieme dei dati raggruppati in due gruppi ugualmente numerosi. Basterà allora individuare la classe in corrispondenza della quale la frequenza cumulativa percentuale prende un valore maggiore o uguale a 50% e tale che la frequenza cumulativa percentuale della classe immediatamente precedente assume un valore strettamente minore di 50%.

ESEMPIO

9.13 Un'industria farmaceutica misura la concentrazione di potassio in mEq/l (milliequivalenti per litro) nel sangue di 50 pazienti a cui è stato somministrato un farmaco. La **tabella 9.12** sintetizza le misure raccolte.

Classi	Frequenza assoluta f_a
(3, 4]	7
(4, 4,5]	12
(4,5, 5]	18
(5, 5,5]	8
(5,5, 6]	5

Tabella 9.12
Dati relativi all'esempio 9.13.

Determiniamo la classe in cui cade la mediana. Non abbiamo dati grezzi a disposizione. Per prima cosa costruiamo la tabella di distribuzione delle frequenze (**tabella 9.13**)

Classi	Frequenza assoluta f_a	Frequenza relativa f_r	Frequenza cumulata percentuale $f_c \times 100$
(3, 4]	7	0,14	14
(4, 4,5]	12	0,24	38
(4,5, 5]	18	0,36	74
(5, 5,5]	8	0,16	90
(5,5, 6]	5	0,1	100

Tabella 9.13
Tabella di frequenza per i dati in tabella 9.12.

Osserviamo la colonna della frequenza cumulata percentuale. Leggiamo che il 38% delle osservazioni è minore o uguale a 4,5, mentre il 74% è minore o uguale a 5. Possiamo concludere che la classe mediana è l'intervallo (4,5, 5].

In generale media e mediana non coincidono; sono tanto più vicine quanto più i dati sono disposti regolarmente e non presentano valori molto più grandi o molto più piccoli rispetto agli altri, detti *anomali* o *outliers*. Entrambi gli indici forniscono un valore più o meno centrato rispetto ai dati. La media risente maggiormente della presenza dei dati anomali. Per questo, in presenza di outliers, conviene calcolare la mediana per capire dove maggiormente si concentrano i dati.

ESEMPIO

9.14 Calcolare media e mediana dei seguenti dati:

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 22.$$

La media è uguale a

$$\frac{2+3+5+6+22}{5} = 7{,}6.$$

La mediana è invece uguale a 5.

Introduciamo un indice detto *coefficiente di correlazione* per stabilire se tra due variabili osservate esiste una correlazione positiva o negativa.

Definizione 9.9 Supponiamo di avere n osservazioni congiunte di due variabili: $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_n, y_n)\}$. Chiamiamo *coefficiente di correlazione* il numero

$$r = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}, \tag{9.3}$$

dove come al solito $\bar{x}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ e $\bar{y}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$ sono rispettivamente la media delle osservazioni $\{x_1, ..., x_n\}$ e $\{y_1, ..., y_n\}$.

Possiamo notare dalla sua definizione che il coefficiente di correlazione può avere segno positivo o negativo: r è positivo se, mediamente, a valori grandi (piccoli) di X corrispondono valori grandi (piccoli) di Y. È, invece, negativo se, a valori grandi (piccoli) di X corrispondono valori piccoli (grandi) di Y; è quindi il segno di r che ci permette di capire che tipo di correlazione sussiste tra le variabili.

Definizione 9.10 Diciamo che tra le variabili X e Y c'è una correlazione

- *positiva* se $r > 0$;
- *negativa* se $r < 0$;
- *nulla* (oppure non c'è correlazione) se $r = 0$.

Le **figure 9.12** e **9.13** contengono grafici che mostrano rispettivamente esempi di correlazione positiva e negativa.

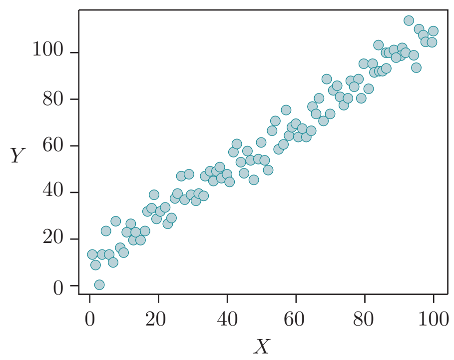


Figura 9.12 Esempio di correlazione positiva tra due variabili X e Y.

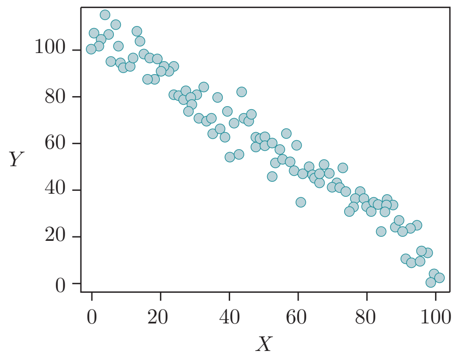


Figura 9.13 Esempio di correlazione negativa tra due variabili X e Y.

La **figura 9.14** mostra un esempio di assenza di correlazione tra le due variabili.

Il coefficiente di correlazione è una grandezza adimensionale ed è possibile dimostrare che $-1 \leq r \leq 1$ e che $r = \pm 1$ se e solo se esistono due costanti m e q tali che

$$y_i = mx_i + q \text{ per } i = 1, 2, ..., n.$$

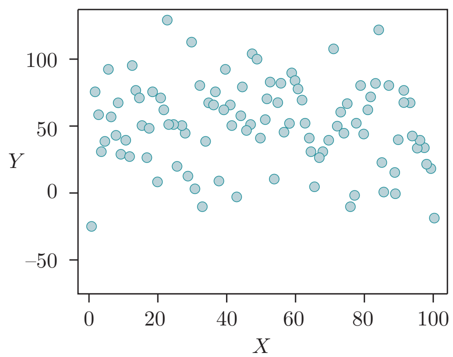


Figura 9.14 Esempio di nessuna correlazione tra due variabili X e Y.

In questo caso, r e m hanno lo stesso segno.

Parliamo di *forte correlazione* se $0{,}8 \leq |r| \leq 1$, di *moderata correlazione* se $0,5 \leq |r| < 0{,}8$ e di *debole correlazione* $0 < |r| < 0{,}5$.

3.2 Regressione lineare

Torniamo alla **figura 9.11** dell'esempio 9.23: i punti sono (grosso modo) disposti lungo una retta crescente e il coefficiente di correlazione $r = 0,917319163$ conferma che esiste una forte correlazione positiva tra temperatura e frequenza del frinire dei grilli. Anche se i punti $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$ non sono perfettamente allineati possiamo ugualmente cercare una retta di equazione

$$y = mx + q$$

che passi *abbastanza vicino* a ciascuno di essi come in **figura 9.15a**.

Ma come facciamo a determinarla? L'idea è quella di trovare due numeri m e q in modo tale che la retta $y = mx + q$ passi il più possibile vicino alle osservazioni. Per ogni coppia (x_i, y_i) introduciamo l'errore o *residuo* (**figura 9.15b**):

$$e_i = y_i - (mx_i + q),$$

e la funzione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ delle due variabili m e q

$$L(m, q) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - q)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2,$$

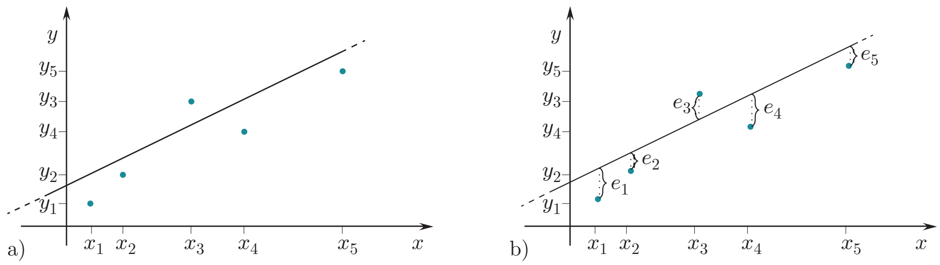


Figura 9.15 a) Esempio di retta di regressione; b) errori dei singoli punti rispetto alla retta.

Metodo dei minimi quadrati

somma dei quadrati dei residui, ossia dei quadrati delle distanze tra il punto (x_i, y_i) e il punto di uguale ascissa x_i che si trova sulla retta $y = mx+q$. Cerchiamo ora la coppia di numeri (m, q) che rende minimo il valore $L(q, m)$. Questo procedimento si chiama *metodo dei minimi quadrati*, e la retta che troveremo è detta *retta di regressione* per gli n punti $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$. I valori di m e q cercati sono il punto di minimo della funzione L e per trovarli usiamo i metodi standard del calcolo differenziale per funzioni di due variabili. Cerchiamo cioè (m, q) tali che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial m} = 0. \end{cases}$$

ESERCIZI

Statistica descrittiva univariata

9.1 I dati seguenti rappresentano il numero di afidi per pianta trovate in 10 piante:

17 13 21 47 3 6 12 25 0 18.

Calcolare media, mediana, varianza, range.

9.2 I dati seguenti rappresentano il numero di fiori per pianta in 9 piante fiorite:

27 39 42 18 21 33 45 37 21.

Calcolare media, mediana, varianza, range.

9.3 Un'industria farmaceutica misura la concentrazione di potassio nel sangue di 50 pazienti a cui è stato somministrato un farmaco. La seguente tabella sintetizza le misure raccolte.

Classi	Frequenza Assoluta
(3, 4]	7
(4, 4,5]	12
(4,5, 5]	18
(5, 5,5]	8
(5,5, 6]	5

1. Si costruisca la tabella delle frequenze relative e cumulate.
2. Si rappresenti tramite istogramma la distribuzione delle misure raccolte.
3. Si individui la classe modale.
4. Si determinino le classi contenenti i quartili.
5. Valutare in modo approssimato media e varianza delle concentrazioni osservate.

9.4 Le seguenti 23 temperature sono state registrate in gradi centigradi.

6,4 4,44 7,49 9,55 9,17 15,15 14,79 8,87

5,12 2,2 7,61 5,91 15,17 31,13 7,04 22,27

21,62 8,84 19,74 26,71 11,16 43,71 19,15

1. Calcolare il minimo, il massimo, i quartili, il range, la differenza interquartile, gli eventuali valori erratici o outlier, la media e la deviazione standard dei dati raccolti.
2. Rappresentare la distribuzione dei dati mediante un boxplot.
3. Stabilire quali degli indici calcolati al punto (1) cambierebbero se la prima temperatura registrata fosse pari a 4,4 anziché 6,4.

9.5 Prima dell'estate l'ufficio del turismo di un paese della Valtellina ha raccolto i dati sull'offerta alberghiera del comune. In tutto nel comune ci sono 10 alberghi 3 stelle, i quali per il mese di agosto dell'anno passato hanno fissato le seguenti tariffe (in euro) per camera doppia (pernottamento + prima colazione):

88 93 87 89 81 74 87 79 86 93.

1. Calcolare il minimo, il massimo, i quartili, il range, la differenza interquartile, la media e la deviazione standard dei dati raccolti.
2. Rappresentare la distribuzione dei dati mediante un boxplot.
3. Scrivere la tabella delle frequenze (assolute, relative, cumulate e densità) relativa ai dati utilizzando gli intervalli:

   (70,75], (75,80], (80,85], (85,90], (90,95].

4. Costruire l'istogramma relativo ai dati.

9.6 Nella seguente tabella sono riportati i dati relativi a 10 punti vendita di una catena di negozi. Per ogni punto vendita sono state rivelate le variabili: numero di dipendenti, X, e superficie in m^2, Y.

unità	1	2	3	4	5
X	6	4	2	7	9
Y	130	140	60	120	200
unità	6	7	8	9	10
X	3	2	4	6	2
Y	80	90	120	160	55

1. Rappresentare mediante un box-plot la variabile X.
2. Calcolare media, deviazione standard e range delle variabili X e Y. Cosa si può concludere?
3. Si classifichi la variabile Y secondo le seguenti classi: $[50, 80)$, $[80, 100)$, $[100, 200]$ e si rappresenti Y mediante un istogramma.

9.7 Il rumore si misura in decibel (dB). La soglia di udibilità in condizioni ideali per una persona con un ottimo udito è circa 1 dB; il livello sonoro di un sussurro è circa 3 dB; una radio ad alto volume arriva a 100 dB, la soglia di tollerabilità è intorno ai 120 dB. I valori seguenti sono i livelli di rumore misurati in 14 differenti occasioni in prossimità della stazione di Roma Termini:

89 82 94 75 114 90 102 125 65 88 110 107 69 122.

1. Calcolare il minimo, il massimo, i quartili, il range, la differenza interquartile, gli eventuali valori erratici o outlier, la media e la deviazione standard dei dati raccolti.
2. Rappresentare la distribuzione dei dati mediante un boxplot.
3. Stabilire quali degli indici calcolati al primo punto cambierebbero se l'ultimo dato registrato fosse pari a 108 anziché 122 (e ricalcolare tali indici).

Statistica descrittiva bivariata

9.8 Al Dipartimento di Medicina Cardivascolare dell'Università di Pisa è stata condotta una ricerca per testare fino a che punto l'ipertensione è un fenomeno genetico. A questo scopo, sono state esaminate 20 famiglie, prendendo la pressione arteriosa di padre (x) e primogenito (y), con i seguenti risultati:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 2980, \sum_{i=1}^{20} y_i = 2030,$$
$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 451350, \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 210850,$$
$$\sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 305700.$$

1. Calcolare il coefficiente di correlazione tra le variabili.
2. Stimare i coefficienti m, q della retta di regressione della pressione del figlio (var. dipendente) rispetto a quella del padre (var. indipendente).
3. Scrivere l'equazione della retta di regressione.
4. Qual è la pressione media attesa del figlio se la pressione del padre è 130? E se è 150? E se è 170?

9.9 L'amministratore delegato di un'azienda produttrice di birra in bottiglia intende stimare i costi della consegna a domicilio ai clienti. Un fattore fondamentale che determina tali costi è rappresentato dal tempo necessario per raggiungere il luogo della consegna e per scaricare le casse delle birre. È stato proposto di collegare il tempo di consegna y con il numero x delle casse di birra. La tabella seguente riporta il numero delle casse consegnate e il tempo (in minuti) necessario per la loro consegna, per 20 clienti.

Cliente	Numero di casse	Tempo di consegna in minuti
1	52	32,1
2	64	34,8
3	73	36,2
4	85	37,8
5	95	37,8
6	103	39,7
7	116	38,5
8	121	41,9
9	143	44,2
10	157	47,1
11	161	43,0
12	184	49,4
13	202	57,2
14	218	56,8
15	243	60,6
16	254	61,2
17	267	58,2
18	275	63,1
19	287	65,6
20	298	67,3

1. Disegnare il diagramma di dispersione per i dati della tabella.
2. Calcolare il coefficiente di correlazione r.
3. Stimare i coefficienti della retta di regressione q, m.
4. Scrivere l'equazione della retta di regressione.
5. Prevedere il tempo di consegna per un cliente che ordina 150 casse di birre.
6. Si può ricorrere al modello stimato per prevedere il tempo di consegna di 500 casse di birra?

9.10 Il signor Rossi è convinto che la velocità di guida non influisca sui consumi della sua macchina, se mantiene una velocità compresa tra i 70 km e i 120 km orari. Per verificare questa supposizione, misura i consumi dell'auto (in termini di chilometri percorsi con un litro di benzina) a diverse velocità tra i 70 km e i 120 km orari. I chilometri percorsi con un litro alle diverse velocità sono stati i seguenti:

velocità (x)	72	80	88	96
km / l (y)	10,27	10,61	9,89	9,34

velocità (x)	104	112	120
km / l (y)	9,13	8,75	8,41

1. Calcolare il coefficiente di correlazione r.
2. Stimare i coefficienti q, m della retta di regressione del consumo di carburante rispetto alla velocità.
3. Scrivere la retta di regressione.
4. Supponiamo che questa persona faccia il prossimo viaggio su una strada con limite di 90 km/h. Che consumo si attende?

9.11

Nei dati in tabella y è la purezza dell'ossigeno prodotto in un processo di distillazione chimica, x la percentuale di idrocarburo presente nel condensatore di distillazione.

Osservazione	x	y
1	0,99	90,01
2	1,02	89,05
3	1,15	91,43
4	1,29	93,74
5	1,46	96,73
7	1,36	94,45
6	0,87	87,59
8	1,23	91,77
9	1,55	99,42
10	1,40	93,65

1. Disegnare il diagramma di dispersione per i dati della tabella.
2. Calcolare il coefficiente di correlazione r.
3. Stimare i coefficienti q, m della retta di regressione della purezza dell'ossigeno y contro il livello di idrocarburo x.
4. Scrivere l'equazione della retta di regressione.

Marco Bramanti, Fulvia Confortola, Sandro Salsa

Matematica per le scienze

Con fondamenti di probabilità e statistica

Inquadra e scopri i contenuti

Matematica per le scienze è un libro destinato a chi affronta corsi universitari che toccano un ampio spettro di argomenti matematici, anche quando la matematica non è il fulcro del corso di studi. È un'opera ricca ma flessibile, pensata anche per un uso modulare, adattabile a percorsi ed esigenze diversi.

I primi quattro capitoli presentano – dopo una ripresa del linguaggio matematico di base (numeri, insiemi, operazioni, funzioni, grafici, limiti) – il calcolo differenziale e integrale per le funzioni reali di variabile reale, argomenti al cuore della maggior parte dei corsi di matematica generale e fondamentali per affrontare i capitoli successivi, che proseguono invece in direzioni diverse e mantengono tra loro una certa indipendenza. I capitoli dal 5 al 9 sono dedicati rispettivamente all'algebra lineare, con cenni di geometria analitica, alle equazioni differenziali ordinarie, ai rudimenti di calcolo infinitesimale in più variabili, al calcolo delle probabilità e alla statistica (descrittiva e inferenziale).

La presentazione dei contenuti segue il criterio dell'essenzialità, sottolineando i concetti importanti e il loro ruolo nella formalizzazione matematica, con attenzione ai prerequisiti necessari alla comprensione, richiamati ed esplicitati per colmare eventuali lacune nella preparazione di base. L'apparato dimostrativo proprio del metodo matematico è stato comunque mantenuto, perché la giustificazione del risultato rende consapevoli dei nessi logici e aiuta a capire.

Il ruolo della matematica nella modellizzazione dei problemi scientifici è messo in luce anche dai numerosi esempi presentati, scelti dagli ambiti delle scienze naturali, della biologia, della fisiologia, della fisica e, in misura minore, dell'ingegneria.

Alla fine di ogni capitolo sono proposti esercizi da risolvere, suddivisi per argomento.

Marco Bramanti è professore ordinario di Analisi matematica presso il dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano. Il suo settore di ricerca è principalmente nell'ambito delle equazioni alle derivate parziali lineari. Si occupa anche di formazione per insegnanti di scuola e di divulgazione.

Fulvia Confortola è professoressa associata di Probabilità e Statistica matematica presso il dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano.
Si occupa di equazioni differenziali stocastiche e controllo ottimo stocastico.

Sandro Salsa è professore emerito del dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano. Ha svolto attività di ricerca presso l'Università del Minnesota (Minneapolis), l'Institute for Advanced Study (Princeton), il Courant Institute of Mathematical Sciences (New York) e l'Università del Texas (Austin).

Le risorse digitali

universita.zanichelli.it/bramanti-matperscienze
A questo indirizzo sono disponibili le risorse digitali di complemento al libro.
Per accedere alle risorse protette è necessario registrarsi su **my.zanichelli.it** inserendo il codice di attivazione personale contenuto nel libro.

Libro con Ebook

Chi acquista il libro nuovo può accedere gratuitamente all'Ebook, seguendo le istruzioni presenti nel sito.

L'accesso all'Ebook e alle risorse digitali protette è personale, non condivisibile e non cedibile, né autonomamente né con la cessione del libro cartaceo.

BRAMANTI*MATEM PER LE SCIENZE LUM
ISBN 978-88-08-32070-4
9 788808 320704
5 6 7 8 9 0 1 2 3 (60B)