

CAPITOLO 1

Richiami di matematica, grandezze fisiche e loro misura

Ricardo Luis Ramos

1.1 Funzioni

Il concetto di funzione rappresenta uno degli strumenti matematici fondamentali per la descrizione quantitativa dei fenomeni fisici. In termini generali, una funzione è una relazione che associa a ciascun valore di una variabile indipendente un unico valore di una variabile dipendente. Tale relazione può essere espressa nella forma

$$y = f(x) \quad (1.1)$$

dove x rappresenta la variabile indipendente, y la variabile dipendente, e f la legge matematica che definisce la relazione tra le due variabili.

In ambito fisico, le funzioni permettono di descrivere come una grandezza varia in funzione di un'altra. Ad esempio, la posizione di un corpo può essere espressa come funzione del tempo; analogamente, la concentrazione di una sostanza può dipendere dalla temperatura o dal tempo. La formalizzazione matematica di queste relazioni consente non solo di interpretare i fenomeni osservati, ma anche di prevederne l'evoluzione.

Tra le funzioni più importanti utilizzate in fisica si distinguono alcune forme fondamentali, quali la funzione lineare, la funzione quadratica, la funzione esponenziale e la funzione logaritmica. Alcuni esempi rappresentativi di queste funzioni sono riportati nella **Figura 1.1**, che consente di confrontare direttamente il loro diverso comportamento al variare della variabile indipendente.

Nella **Figura 1.1** la funzione $y = x$ rappresenta un caso particolare di funzione lineare. In generale, una funzione lineare è espressa nella forma

$$y = ax + b \quad (1.2)$$

dove a e b sono costanti reali. Il parametro a rappresenta il coefficiente angolare della retta, ossia la sua pendenza, mentre b rappresenta l'intercetta con l'asse delle ordinate. Variando questi parametri si ottiene un'intera famiglia di rette, che differiscono per inclinazione e posizione.

La funzione $y = ax^2$ rappresenta un caso particolare di funzione quadratica. In generale, una funzione quadratica ha la forma

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1.3)$$

dove a , b e c sono costanti reali.

Il grafico di una funzione quadratica è una parabola: il segno del coefficiente a ne determina la concavità (verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$), mentre i coefficienti b e c ne determinano la posizione nel piano cartesiano.

Le soluzioni dell'equazione quadratica associata

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.4)$$

si ottengono mediante la formula risolutiva

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.5)$$

e rappresentano i punti in cui la funzione interseca l'asse x .

Il termine $b^2 - 4ac$, detto discriminante, permette di stabilire il numero di soluzioni reali: se è positivo si hanno due soluzioni reali distinte, se è nullo una sola soluzione, mentre se è negativo non esistono soluzioni reali.

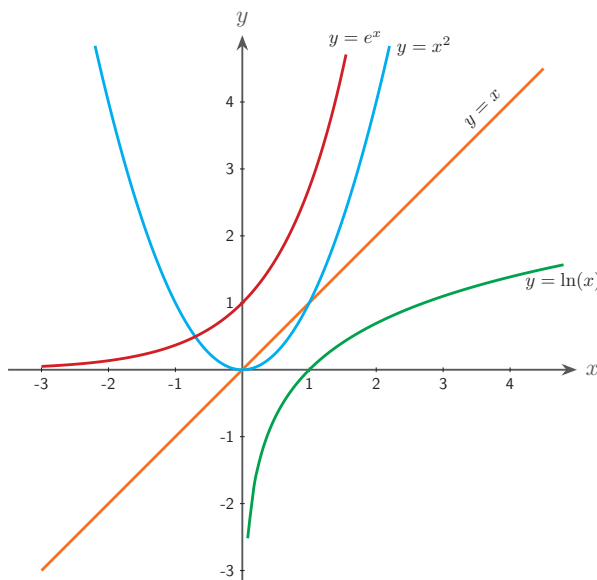
Per estendere l'analisi a comportamenti non lineari più generali, è utile introdurre le funzioni esponenziali, che descrivono processi di crescita o decadimento. Una funzione esponenziale può essere espressa nella forma

$$y = a^x \quad (1.6)$$

dove a è una costante positiva diversa da 1. Tra tutte le funzioni esponenziali, un ruolo particolarmente importante è svolto dalla funzione di base e

$$y = e^x \quad (1.7)$$

che rappresenta il caso illustrato in **Figura 1.1**. Essa è definita per ogni valore reale di x ed è sempre positiva; inoltre, cresce rapidamente per valori positivi di x e tende a zero per valori negativi.



◀ Figura 1.1

Figura 1.1. Rappresentazione grafica delle funzioni $y = x$, $y = x^2$, $y = e^x$ e $y = \ln(x)$.

1. Fornire esempi di diverse tipologie di funzioni (lineare, quadratica, esponenziale), rappresentarne il grafico e descriverne le principali caratteristiche (andamento, simmetria, crescita o decrescita).



Inquadra il QRCode per le soluzioni

Una proprietà fondamentale della funzione esponenziale è

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad (1.8)$$

che riflette il carattere moltiplicativo della crescita esponenziale.

La funzione logaritmica in base a è la funzione inversa della funzione esponenziale $y = a^x$ ed è espressa nella forma

$$y = \log_a(x) \quad (1.9)$$

dove a è una costante positiva diversa da 1. Un caso di particolare importanza è rappresentato dal logaritmo naturale, corrispondente ad $a = e$

$$y = \ln(x) \quad (1.10)$$

anch'esso rappresentato in **Figura 1.1**. Tale funzione è definita solo per valori positivi della variabile indipendente.

Le principali proprietà dei logaritmi sono

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad (1.11)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad (1.12)$$

$$\ln(a^n) = n \ln a \quad (1.13)$$

(per $a > 0$, $b > 0$).

Queste proprietà sono particolarmente utili in fisica, poiché consentono di semplificare espressioni che coinvolgono prodotti, rapporti e potenze.

Tra le funzioni di particolare importanza in fisica si annoverano anche le funzioni trigonometriche, che descrivono relazioni tra angoli e lunghezze e trovano ampia applicazione nello studio di fenomeni periodici. Per introdurre le funzioni trigonometriche è necessario definire la misura degli angoli in radianti. Nella **Figura 1.2** sono rappresentati archi di lunghezza s_1 , s_2 , s_3 appartenenti a circonferenze di raggio R_1 , R_2 , R_3 . In tutti e tre i casi, gli archi sottendono il medesimo angolo al centro α .

Figura 1.2 ▶

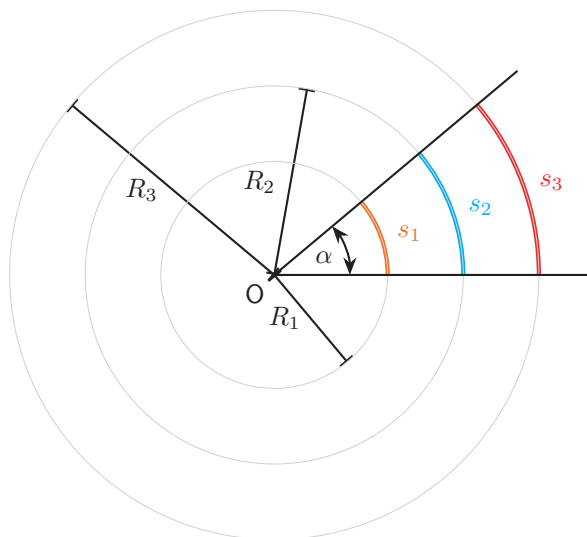


Figura 1.2. Definizione di radiante mediante il rapporto tra la lunghezza dell'arco s e il raggio R della circonferenza.

Si osserva che, pur variando il raggio, il rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio rimane invariato, ossia

$$\frac{s_1}{R_1} = \frac{s_2}{R_2} = \frac{s_3}{R_3} \quad (1.14)$$

Questo rapporto dipende unicamente dall'ampiezza dell'angolo ed è indipendente dal raggio della circonferenza. Per questo motivo, esso viene assunto come definizione della misura dell'angolo in radianti

$$\alpha = \frac{s}{R} \quad (1.15)$$

dove s è la lunghezza dell'arco sotteso dall'angolo α e R è il raggio della circonferenza.

In particolare, quando la lunghezza dell'arco è numericamente uguale al raggio, si ottiene

$$\alpha = 1 \text{ rad} \quad (1.16)$$

Per stabilire le equivalenze con la misura in gradi si considera l'intera circonferenza. Poiché la sua lunghezza è pari a $2\pi R$, l'angolo giro corrisponde a

$$\alpha = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad} \quad (1.17)$$

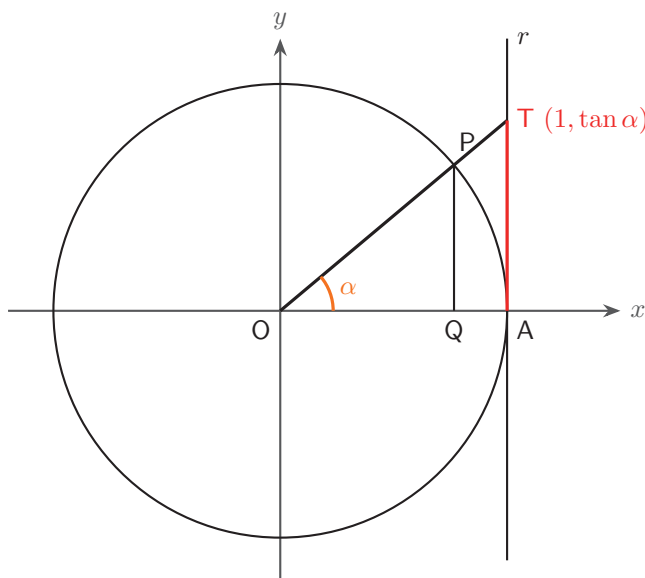
che equivale a 360° . Da questa relazione si ricavano le equivalenze fondamentali

$$180^\circ = \pi \text{ rad} \quad (1.18)$$

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} \quad (1.19)$$

Le funzioni trigonometriche possono essere introdotte a partire dalla geometria della circonferenza unitaria, come mostrato nella **Figura 1.3**.

Si consideri una circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine O . Sia P un punto della circonferenza e sia α l'angolo formato dal segmento OP con l'asse x . Poiché il raggio è unitario, si ha $OP = 1$.



◀ Figura 1.3

Figura 1.3. Circonferenza unitaria e triangolo rettangolo OPQ utilizzato per la definizione di seno, coseno e tangente.

2.
Rappresentare
graficamente le funzioni
seno e coseno e
determinarne i valori per
 $0, \pi/2, \pi$ e $3\pi/2$.



Inquadra il QRCode
per le soluzioni

Dal punto P si conduce la perpendicolare all'asse x , individuando il punto Q . Si ottiene così il triangolo rettangolo OPQ , con angolo retto in Q . In questo triangolo il segmento OP è l'ipotenusa, il segmento OQ è il cateto adiacente all'angolo α , mentre il segmento QP è il cateto opposto all'angolo α .

Sulla base di queste definizioni, si introducono le funzioni seno e coseno

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \frac{OQ}{OP} \quad (1.20)$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} = \frac{QP}{OP} \quad (1.21)$$

Poiché $OP = 1$, tali relazioni si semplificano in

$$\cos \alpha = OQ \quad (1.22)$$

$$\sin \alpha = QP \quad (1.23)$$

Ne segue che il punto P ha coordinate

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad (1.24)$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OPQ , si ottiene la relazione fondamentale

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1.25)$$

La funzione tangente è definita come rapporto tra cateto opposto e cateto adiacente

$$\tan \alpha = \frac{QP}{OQ} \quad (1.26)$$

da cui segue immediatamente

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (1.27)$$

La **Figura 1.3** consente inoltre di interpretare geometricamente la tangente mediante la retta tangente alla circonferenza nel punto A , che interseca la semiretta OP nel punto T .

Poiché i triangoli OPQ e OTA sono simili, si ha

$$\frac{QP}{OQ} = \frac{AT}{OA} \quad (1.28)$$

Dalla definizione di tangente (**Equazione 1.26**) segue che

$$\tan \alpha = \frac{AT}{OA} \quad (1.29)$$

Poiché $OA = 1$, si ottiene direttamente

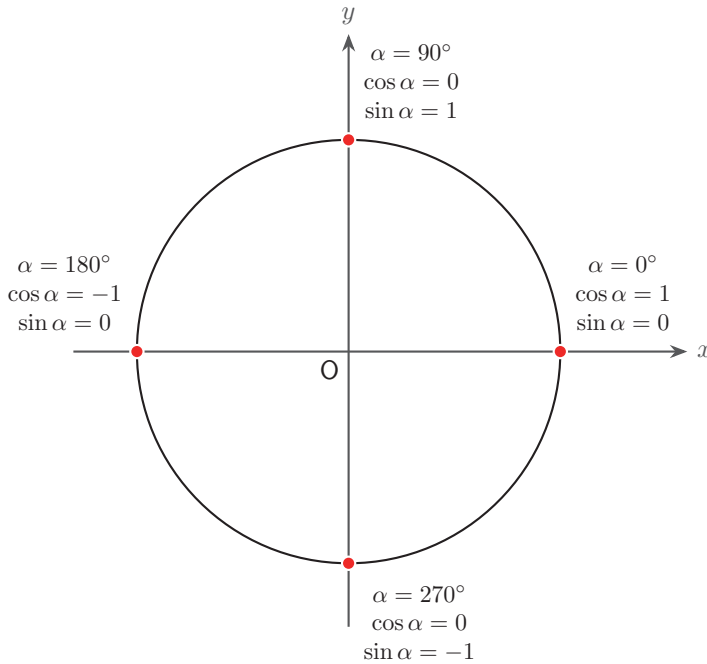
$$AT = \tan \alpha \quad (1.30)$$

Ne consegue che il punto T ha coordinate

$$T = (1, \tan \alpha) \quad (1.31)$$

Questa costruzione fornisce un'interpretazione geometrica immediata della funzione tangente, mostrando come essa possa essere rappresentata come l'ordinata del punto di intersezione tra la retta tangente alla circonferenza unitaria e la semiretta individuata dall'angolo α .

I valori delle funzioni trigonometriche per alcuni angoli particolari sono riportati nella **Figura 1.4**, che permette di visualizzare immediatamente i valori di seno e coseno per angoli notevoli.



◀ Figura 1.4

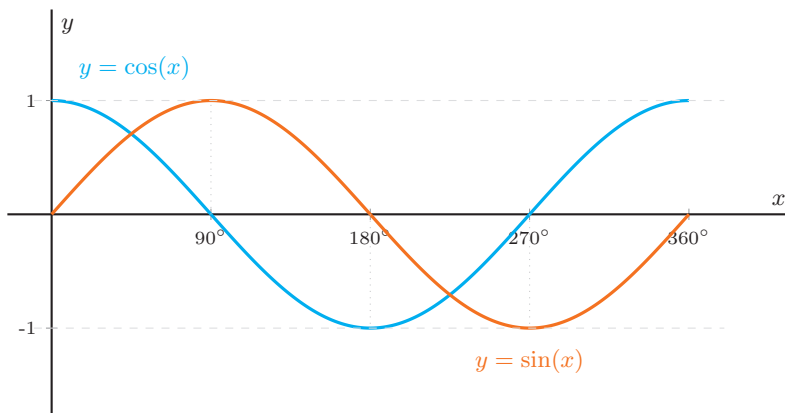
Figura 1.4. Valori delle funzioni seno e coseno per angoli particolari sulla circonferenza unitaria.

Infine, la rappresentazione grafica delle funzioni seno e coseno è mostrata nella **Figura 1.5**, dalla quale si osserva il loro andamento oscillatorio.

Dalla **Figura 1.5** si osserva che entrambe le funzioni sono periodiche con periodo $360^\circ = 2\pi$

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha \quad (1.32)$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha \quad (1.33)$$



◀ Figura 1.5

Figura 1.5. Andamento delle funzioni seno e coseno in funzione dell'angolo.

Inoltre, il seno è una funzione dispari

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad (1.34)$$

mentre il coseno è una funzione pari

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad (1.35)$$

Queste proprietà riflettono importanti simmetrie geometriche e risultano fondamentali nello studio dei fenomeni periodici.

Esempio 1.1

Determinare il valore delle funzioni seno, coseno e tangente per un angolo $\alpha = 45^\circ$.

Svolgimento

Per un triangolo rettangolo isoscele con angolo $\alpha = 45^\circ$, i cateti hanno la stessa lunghezza. Assumendo un triangolo con cateti di lunghezza 1, per il teorema di Pitagora l'ipotenusa vale

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Si ottiene quindi

$$\sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Moltiplicando per la radice di due sia numeratore sia denominatore, si può scrivere equivalentemente anche

$$\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La tangente vale

$$\tan(45^\circ) = \frac{\sin(45^\circ)}{\cos(45^\circ)} = 1$$

I valori delle funzioni trigonometriche per 45° sono quindi

$$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan(45^\circ) = 1$$

Questo risultato mostra come, a partire da semplici considerazioni geometriche, sia possibile determinare i valori delle principali funzioni trigonometriche per angoli notevoli.